# Intérrogation écrite 1

06 Octobre 2014

*Durée : 40 minutes*

*L'usage de tout document ou appareil électronique est strictement interdit.*

**Exercice 1 (barème indicatif : 8 points).**

(a) Donner la définition d'une distance $d$ sur un ensemble $X$.

(b) Donner la définition d'une norme $N$ sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $V$.

(c) Soient $(X, d)$ un espace métrique et $A$ une partie de $X$. Décrire (avec des quantificateurs) quand un point $x \in X$ appartient à l'adhérence de $A$.

(d) L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni de la distance usuelle $d$ définie par $d(x, y) = |x - y|$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$. Traduire (avec des quantificateurs) la propriété : « $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ ».

**Exercice 2 (barème indicatif : 10 points).**
On munit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne $N$ usuelle : si $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $N(v) = \|v\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$. Notons $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < x\}$.

(a) Dessiner $E$ comme partie du plan euclidien standard.

(b) $E$ est-il ouvert ? Fermé ? Justifier par une rédaction rigoureuse.

(c) Déterminer l'intérieur de $E$.

(d) Déterminer l'adhérence de $E$.

(e) Déterminer la frontière de $E$.

(f) $E$ est-il borné ? Justifier.

**Exercice 3 (barème indicatif : 4 points).**
Soit $d_\infty$ la distance induite par la norme infini $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ :

$$\|(x, y)\|_\infty = \max\{|x|, |y|\}, \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Calculer la distance $d_\infty(p, E)$, où $p = (-1, 3)$ et $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < x\}$ de l'exercice précédent. Justifier le calcul fait.